

**Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2025-2026 учебный год, 8 класс**

8.1. Можно ли в таблицу 5×5 записать числа $1, 2, 3, \dots, 25$ так, чтобы в каждой строке сумма нескольких записанных чисел была равна сумме остальных чисел этой строки?

Ответ: нет, не может

Решение:

Если строка разбивается на 2 равные по сумме части, то общая сумма чисел в каждой строке должна быть чётной. Тогда общая сумма складывается из чётных чисел, а значит – чётна.

С другой стороны, сумма чисел от 1 до 25 содержит 13 нечётных слагаемых, а значит – нечётна. Противоречие.

критерии	баллы
1. Полное решение задачи	7
2. Нет объяснения, почему сумма чисел от 1 до 25 – нечётна, в остальном – верно.	6
3. Сформулирована основная идея про чётность суммы чисел в строке, но окончательный вывод не сделан.	4
4. Решения нет, но есть упоминание о чётности.	1
5. Неверное решение.	0

8.2. Найдите $a - b$, если $9a^2 + 4b^2 = 20b - 25$.

Ответ: -2,5

Решение:

Преобразуем выражение $9a^2 + 4b^2 - 20b + 25 = 0 \Rightarrow (3a)^2 + (2b - 5)^2 = 0$.

Каждый квадрат – неотрицателен, значит и вся сумма неотрицательна, а равенство достигается только, если каждый из них равен 0. Значит $3a = 0$ и $2b - 5 = 0$, откуда $a = 0$ и $b = 2,5$.
 $a - b = -2,5$

критерии	баллы
1. Полное решение задачи	7
2. Найдены a и b , но окончательный ответ не сформулирован.	6

3. Используются формулы сокращённого умножения без дальнейших продвижений	2
4. Неверное решение.	0

8.3. Пусть $P(n)$ – произведение всех цифр натурального числа n . Найдите все такие n , для которых верно $n \cdot P(n) = 2025$.

Ответ: 135

Решение:

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 45^2$$

Хотя бы один из множителей не больше 45 и это не n , так как наибольшее произведение цифр числа, меньшего, чем 45:

$$3 \cdot 9 = 27 \text{ (тоже меньше, чем 45).}$$

$P(n)$ не может делиться нацело на 25, так как степени тройки до четвёртой не содержат цифр 5, значит $n : 45$. Осталось проверить:

$$n = 45 \cdot 3 = 135 \text{ подходит}$$

$$n = 45 \cdot 5 = 225 \text{ не подходит}$$

$$n = 45 \cdot 15 = 675 \text{ не подходит}$$

критерии	баллы
1. Полное решение задачи	7
2. Верный ответ. Доказано, что $n : 45$, есть разложение на множители, но какой-то случай упущен.	5
3. Доказано, что $n : 45$, есть разложение на множители, получен неверный ответ.	3
4. Неполный перебор до правильного ответа.	Не более 2
5. Есть разложение на множители, но нет дальнейших продвижений.	1
6. Неверное решение.	0

8.4. В равнобедренном треугольнике KMN проведена биссектриса KD так, что $DM = KN$. Докажите, что биссектриса $KD = KN$.

Доказательство:

Случай, где $KN = MN$ невозможен ($MD < MN = KN$).

В случае, если $KM = KN$, KD – биссектриса, проведённая к основанию, а значит и медиана. $KM = KN = MD = DN$, что противоречит неравенству треугольника.

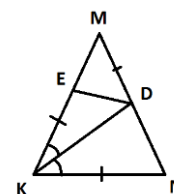
Остаётся только $KM = MN$.

Отметим точку E на стороне KM так, что $KE = KN$.

$\triangle KED = \triangle KDN$ ($KE = KN$, $\angle EKD = \angle DKN$, KD – общая)

$ED = DN = MN - MD = MK - KE = EM \Rightarrow$

$\triangle MED$ – равнобедренный.



Пусть $\angle EKD = \alpha$, тогда $\angle MDE = \angle EMD = 180^\circ - \angle EKD - \angle DKN = 180^\circ - 2\alpha - 2\alpha = 180^\circ - 4\alpha$.

$\angle KED = \angle MDE + \angle EMD = 360^\circ - 8\alpha$ (внешний угол $\triangle MED$); $\angle KED = \angle KND = 2\alpha$ (из $\triangle KED = \triangle KDN$).

Получаем $360^\circ - 8\alpha = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 36^\circ$. $\angle EKD = 2\alpha = 72^\circ = 180^\circ - 4\alpha = \angle EMD$. Получаем равнобедренный треугольник KMD , где $KD = MD$. А значит $KD = KN$.

Критерии	баллы
1. Полное решение задачи.	7
2. Доказано для основного случая, но не рассмотрены различные варианты для равнобедренного треугольника.	6
3. Доказан факт $\triangle KED = \triangle KDN$ или аналогичный ему.	3
4. Сделано дополнительное построение, способствующее продвижению. В остальном неверно.	1
5. Неверное решение.	0

8.5. Имеется набор из различных натуральных чисел. Каким должно быть минимальное количество чисел в этом наборе, чтобы его медиана отличалась от среднего арифметического на $\frac{1}{8}$?

Ответ: 8

Решение:

Оценка:

Пусть S – сумма этих чисел, n – их количество.

Медиана набора целых чисел – целое число или отличается от него на 0, 5, тогда:

$$1) \frac{S}{n} = k \pm \frac{1}{8} \Rightarrow S = kn \pm \frac{n}{8} \Rightarrow n : 8, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \frac{S}{n} = k + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{8} \Rightarrow S = kn + \frac{5n}{8} \text{ или } S = kn + \frac{3n}{8} \Rightarrow n : 8, k \in \mathbb{Z}$$

Из оценки видно, что 8 будет минимальным.

$$S = 8k \pm 1, S = 8k + 3 \text{ или } S = 8k + 5$$

Пример:

$$A = \{0; 1; 2; 3; 5; 7; 8; 9\}$$

$$\bar{A} = 4\frac{3}{8} \text{ и } A_{med} = 4\frac{1}{2}$$

Примечание: примеров бесконечное множество.

критерии	баллы
1. Полное решение задачи.	7
2. Оценка без примера.	4
3. Верный ответ с примером.	3
4. Заявлено: «Медиана набора целых чисел – целое число или отличается от него на 0,5», без дальнейших продвижений.	1
5. Только верный ответ, без оценки и примера.	0
6. Неверное решение.	0